

# MA2115 Clase 2: Series de números reales

Elaborado por los profesores  
Edgar Cabello y Marcos González

## 1 Definición de Serie

**Definición 1** Dada una sucesión de escalares  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , definimos su sucesión de sumas parciales mediante  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ , para cada  $n \geq 1$ . El límite  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  es llamado la serie asociada a la sucesión  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y es denotada por  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Si dicho límite  $S$  existe y es finito, decimos que la serie converge a  $S$  o que  $S$  es la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . En otro caso, decimos que la serie diverge.

**Ejemplo 1** Dada la sucesión definida por  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $n \geq 1$ , encuentre una fórmula para la sucesión de sumas parciales  $s_n$  y demuestre que la serie asociada converge.

**Solución:** Para cada  $n \geq 1$ ,  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ . Observemos además que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

y, como  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ , tenemos que  $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Es claro entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

es decir, la serie converge a 1.  $\square$

**Ejemplo 2** Demuestre que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$  diverge.

**Solución:** Es fácil calcular la  $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}$  si consideramos por separado los casos en que  $n$  es par o impar. Si  $n$  es par entonces los términos de la suma se cancelan y obtenemos  $s_n = 0$ , mientras que, si  $n$  es impar entonces  $n - 1$  es par y tenemos que  $s_n = s_{n-1} + (-1)^{n-1} = 1$ . En suma,

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Alternativamente, podemos describir  $s_n$  mediante la fórmula  $\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ , para cada  $n \geq 1$ . Como la sucesión de sumas parciales alterna entre 0 y 1, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  no existe y, en consecuencia, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  diverge.  $\square$

## 2 Propiedades de las series convergentes

**Teorema 1** Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión tal que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge. Entonces, la sucesión  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a cero.

**Demostración:** De acuerdo a la definición, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si, y sólo si, el límite  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existe, donde  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , para cada  $n \geq 1$ . Por otra parte, en virtud de la definición de límite, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$  siempre que  $n > N$ . Así, para cada  $n > N$  (con lo cual también  $n + 1 > N$ ), tenemos que

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |s_{n+1} - S - s_n + S| \leq |s_{n+1} - S| + |s_n - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n| < \varepsilon$  y, por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

**Teorema 2 (Linealidad)** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  series convergentes y sea  $c$  una constante. Entonces, las series  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  convergen y, además, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**Demostración:** Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergen, los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k$  existen y, en consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k)$  existe, ya que el límite es lineal. Además,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Análogamente, es claro que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ca_k$  existe y

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ca_k = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

es decir,  $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . □

**Corolario 1** Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  una serie convergente y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  una serie divergente. Entonces, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  es divergente.

**Demostración:** Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos por el contrario que  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  converge. Entonces, como  $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ , tenemos  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y, en particular,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge, lo cual es una contradicción. □

**Ejemplo 3** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n} + \frac{1}{4^n} \right)$  es divergente, ya que ésta es suma de la serie armónica

$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , la cual es divergente, y de la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ , la cual es convergente.

### 3 La condición de Cauchy

**Definición 2** Decimos que una sucesión  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  satisface la condición de Cauchy o que es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  siempre que  $n, m > N$ .

**Lema 1** Toda sucesión de Cauchy es acotada.

**Demostración:** Usando la condición de Cauchy con  $\varepsilon = 1$ , tenemos que existe un entero  $N > 0$  tal que  $|a_n - a_m| < 1$  siempre que  $n, m > N$ . En particular,  $|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon$  siempre que  $n > N$ . Pero

$$|a_n - a_{N+1}| < \varepsilon \iff a_{N+1} - \varepsilon < a_n < a_{N+1} + \varepsilon$$

de lo cual es claro que  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es acotada.  $\square$

**Definición 3** Sean  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  sucesiones de escalares. Decimos que  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  es una subsucesión de  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , si existe una sucesión creciente de enteros positivos  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  tal que  $b_k = a_{n_k}$ , para cada  $k \geq 1$ .

Por ejemplo,  $\left\{ \frac{n^2}{n^4 + 2n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$  es una subsucesión de  $\left\{ \frac{n}{n^2 + 2n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Lema 2** Toda sucesión contiene una subsucesión monótona.

**Demostración:** Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión cualquiera. Un entero positivo  $n \geq 1$  es llamado un punto cumbre de  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  si  $a_n > a_m$ , para todo  $m > n$ . Supongamos primero que  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  tiene infinitos puntos cumbres. Entonces, existe una subsucesión  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ , la cual consta sólo de puntos cumbres y, en consecuencia, para cada  $k \geq 1$ ,  $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$ , ya que  $n_k$  es un punto cumbre y  $n_k < n_{k+1}$ . En otras palabras, la subsucesión  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  es decreciente. Si, por el contrario, hay una cantidad finita de puntos cumbres, podemos elegir un entero positivo  $n_1$  el cual sea mayor que todos los puntos cumbres. Como  $n_1$  no es un punto cumbre, existe  $n_2 > n_1$  tal que  $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ . Como  $n_2$  no es un punto cumbre, existe un  $n_3 > n_2$  tal que  $a_{n_3} > a_{n_2}$ . Continuando de esta manera, podemos construir una sucesión creciente  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  de enteros positivos, tal que la subsucesión  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  es no-decreciente. En ambos casos, la sucesión  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  contiene una subsucesión monótona.  $\square$

**Lema 3** Sea  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy la cual tiene una subsucesión convergente. Entonces,  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  también converge.

**Demostración:** Como  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  siempre que  $n, m > N$ . Sea  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  una subsucesión convergente a  $L$ . Entonces, existe  $K > 0$  tal que  $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  siempre que  $k > K$ , y podemos elegir  $K$  de tal forma que también se cumpla que  $n_k > N$ , para todo  $k > K$ . En consecuencia, para todo  $n > N$ , tenemos que

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir,  $|a_n - L| < \varepsilon$ , siempre que  $n > N$ .  $\square$

**Teorema 3 (Criterio de Cauchy)** Una sucesión  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  es convergente si, y sólo si, satisface la condición de Cauchy. Es decir, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe si, y sólo si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  siempre que  $n, m > N$ .

**Demostración:** ( $\implies$ ) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  entonces, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  siempre que  $n > N$ . Por lo tanto, si  $n, m > N$  entonces

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $|a_n - a_m| < \varepsilon$  siempre que  $n, m > N$ .

( $\impliedby$ ) Recíprocamente, si  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  satisface la condition de Cauchy entonces, en virtud del Lema 1, es una sucesión acotada. Por otra parte, el Lema 2 nos dice que  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  tiene una subsucesión monótona, la cual claramente es también acotada y, por lo tanto, usando la Proposición 1.c) de la clase 1, dicha subsucesión debe ser convergente. Finalmente, usando el Lema 3, tenemos que al tener una subsucesión convergente,  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  también es convergente.  $\square$

**Teorema 4** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  son dos series que difieren solamente en sus primeros términos, entonces ambas series convergen o divergen simultáneamente.

**Demostración:** Sean  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$  las sucesiones de sumas parciales de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ , respectivamente. Tenemos como hipótesis que existe un entero  $k \geq 1$  tal que  $a_n = a'_n$ , para todo  $n \geq k$ . En particular, si  $n > m > k$  entonces

$$s_n - s_m = \sum_{m+1}^n a_n = \sum_{m+1}^n a'_n = s'_n - s'_m.$$

Es claro entonces que la condición de Cauchy se cumple para  $(s_n)$  si, y sólo si, ésta se cumple para  $(s'_n)$ . Por lo tanto, en virtud del Criterio de Cauchy,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge si, y sólo si,  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$  converge.  $\square$

## 4 La Serie Armónica

**Corolario 2 (Criterio del Límite)** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

El recíproco NO es cierto. Es posible que una sucesión tenga una serie divergente y, sin embargo, su término general tienda a cero. El ejemplo más conocido, de este tipo de series, es tan importante que amerita llevar un nombre.

**Definición 4** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  es llamada la serie armónica.

**Teorema 5** La serie armónica diverge.

**Demostración:** Más adelante, cuando veamos el criterio de la integral, daremos una demostración alternativa de este hecho. En esta demostración usaremos el criterio de Cauchy para la existencia de límites.

Veamos que la sucesión de sumas parciales  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  no satisface la condición de Cauchy. Es decir, tenemos que demostrar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $N > 1$ , existen  $n \geq m > N$  para los cuales  $\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} = s_n - s_m \geq \varepsilon$ . En efecto, si  $n = 2^{N+1}$  y  $m = 2^N$ , tenemos que  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{N+1}}$  para cada  $2^N + 1 \leq k \leq 2^{N+1}$ , de modo que

$$\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=2^N+1}^{2^{N+1}} 1 = \frac{1}{2^{N+1}} (2^{N+1} - 2^N) = \frac{2^N}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}.$$

Es decir, para todo  $N > 1$ , si hacemos  $n = 2^{N+1}$  y  $m = 2^N$ , tenemos que  $n > m > N$  y  $|s_n - s_m| \geq \frac{1}{2}$ , de lo cual concluimos que la sucesión  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  no satisface la condición de Cauchy y, en consecuencia, la serie alternada diverge.  $\square$

## 5 La Serie Geométrica

**Definición 5** Dados números reales  $a$  y  $r$ , con  $a \neq 0$ , definimos la serie geométrica de razón  $r$  como la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$ .

Es de uso común hacer variar el índice de la suma geométrica entre 0 e  $\infty$ , lo cual nos da la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$  en lugar de  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ . Ambas formas representan por supuesto a la misma serie.

Si denotamos por  $s_n$  a la  $n$ -ésima suma parcial de la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ , tenemos que  $s_n = \sum_{j=1}^n ar^{j-1}$ . Observemos ahora que  $rs_n = \sum_{j=1}^n ar^j$ , de modo que  $s_n - rs_n = \sum_{j=1}^n ar^{j-1} - \sum_{j=1}^n ar^j = a - ar^n$ , es decir,  $s_n(1 - r) = a(1 - r^n)$  y, en consecuencia, si  $r \neq 1$ , tenemos que

$$s_n = \sum_{j=1}^n ar^{j-1} = a \frac{1 - r^n}{1 - r}. \quad (1)$$

**Teorema 6** Una serie geométrica de razón  $r$  diverge siempre que  $|r| \geq 1$  y converge siempre que  $|r| < 1$ . Más aún, si  $|r| < 1$ , la suma de la serie está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}.$$

**Demostración:** Si  $|r| \geq 1$ , entonces, usando el corolario 1 y el hecho que  $|r^n| \geq 1$ , para todo  $n \geq 1$ , concluimos que la serie geométrica diverge. Supongamos entonces que  $|r| < 1$  (y, en particular,  $r \neq 1$ ). De acuerdo con la ecuación 1, la  $n$ -ésima suma parcial de la serie geométrica está dada por  $s_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$ , con lo cual la serie geométrica converge si, y sólo si, el límite  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r}$  existe. Como  $a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r}$ , tenemos que el límite  $S$  existe si, y sólo si,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$  existe, pero hemos visto en el corolario 1 de la clase 1 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  siempre que  $|r| < 1$ . Por lo tanto, el límite  $S$  converge y

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1 - r} - \frac{r^n}{1 - r} \right) = \frac{a}{1 - r} - \frac{1}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \frac{a}{1 - r},$$

es decir,  $S = \frac{a}{1 - r}$ . □

**Ejemplo 4** 1. La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n = 3 \left( \frac{1}{2} \right)^0 + 3 \left( \frac{1}{2} \right)^1 + 3 \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \dots$  es una serie geométrica de razón  $r = \frac{1}{2} < 1$ , donde  $a = 3$ . Por lo tanto, converge al valor  $\frac{a}{1 - r} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{6}{2 - 1} = 6$ .

2. La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n = \left( \frac{3}{2} \right)^0 + \left( \frac{3}{2} \right)^1 + \left( \frac{3}{2} \right)^2 + \dots$  es una serie geométrica de razón  $r = \frac{3}{2} > 1$  y, en consecuencia, diverge.

## 6 Series telescópicas

**Definición 6** Decimos que una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es una serie telescópica si existe una sucesión  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$

tal que  $a_n = b_n - b_{n+1}$ , para cada  $n \geq 1$ . Es decir, si la serie tiene la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ .

Hemos visto en el ejemplo 1 que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  es telescópica, ya que  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .

Gracias a este hecho pudimos calcular explícitamente la  $n$ -ésima suma parcial de esta serie y, posteriormente, la suma de la serie. Esto siempre es posible para cualquier serie telescópica.

**Teorema 7** Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  una serie telescópica y sea  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  su sucesión de sumas parciales.

Entonces,  $s_n = b_1 - b_{n+1}$ , para cada  $n \geq 1$  y, en consecuencia, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  converge a  $b_1 - L$  si, y sólo si, el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existe y es igual a  $L$ .

**Demostración:** Para cada  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{k=1}^n b_{k+1} \\ &= b_1 + \sum_{k=2}^n b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} - b_{n+1} \end{aligned}$$

y, como  $\sum_{k=2}^n b_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}$  (en efecto, observemos que ambos son iguales la suma  $b_2 + b_3 + \dots + b_n$ ), tenemos que  $s_n = b_1 - b_{n+1}$ . Es claro entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$$

y, por lo tanto,  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$  existe si, y sólo si, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$  converge a  $b_1 - L$ .  $\square$

**Ejemplo 5** Demuestre que la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$  converge y encuentre el valor de su suma.

**Solución:** Como

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) &= \ln \left( \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2 \ln(n) \\ &= [\ln(n-1) - \ln(n)] - [\ln(n) - \ln(n+1)], \end{aligned}$$

tenemos que, para cada  $n \geq 2$ ,  $\ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) = b_n - b_{n+1}$  donde  $b_n = \ln(n-1) - \ln(n)$ . Como, además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n-1) - \ln(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n-1}{n} \right) = \ln 1 = 0,$$

tenemos que la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$  converge al valor  $b_2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$  (observemos que se considera  $b_2$  en lugar de  $b_1$  ya que la serie en cuestión está indexada a partir de  $n = 2$ ).  $\square$